КР 4 по МА. Исследование сходимости рядов.

В каждом задании дан ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Далее буду применять обозначения: a_n — n-ый член ряда, a_{n+1} — $n+1$-ый член ряда.

Задание 1. Признак сравнения.

Дано:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

Находим степень ряда $P(n)$ и степень ряда $Q(n)$. **deg** — обозначение степени.

Если $\deg Q(n) - \deg P(n) > 1$, то ряд сходится.

Если $\deg Q(n) - \deg P(n) \leq 1$, то ряд расходится.

Задание 2. Признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Если $l < 1$, то ряд сходится.

Если $l > 1$, то ряд расходится.

Задание 3. Признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Если $l < 1$, то ряд сходится;

Если $l > 1$, то ряд расходится.

Задание 4. Признак Лейбница.

Дано:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Если общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд сходится.

Иначе можно применить любой признак из предыдущих заданий, например признак Даламбера, к ряду составленному из абсолютных величин членов исходного ряда. Если по признаку ряд сходится, то исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Задание 5. Область сходимости.

Дано, степенной ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a_0)^n$$

Для вычисления радиуса сходимости R степенного ряда применяются формулы:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

и

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Находим интервал сходимости: $(a_0 - R; a_0 + R)$, подставляем R и a_0.

Далее исследуем сходимость рядов на концах этого интервала. Подставляем в исходный ряд вместо x значения концов интервала и применяем любой признак из предыдущих заданий.

Задание 6. Разложение функции.

Дано: $f(x)$ и x_0

Ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + ... + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Находим все производные $f(x)$: $f'(x), f''(x), f'''(x)...$

Подставляем в производные значение x_0 вместо x и считаем. Полученные результаты подставляем в ряд Тейлора.